

LAHENDUSED 10.KLASS

1. Vastus: 108 detaili

Lahendus:

Olgu ühe päeva jooksul teeb tööline x detaili, õpilane teeb y detaili.

Olgu tööline saab detailid valmis a päevaga. Siis detailide arv, mida pidi tööline valmistama on ax .

$$ay = 0,8ax$$

Kust $y = 0,8x$

Teades, et neil oleks kahepeale valmis 87,5% detailidest, kui õpilane teeks päevas 1 detaili võrra vähem, saame võrrandi:

$$ax + a(0,8x - 1) = 0,875 \cdot 2ax$$

$$1,8x - 1 = 1,75x$$

$$0,05x = 1$$

$$x = 20$$

Ehk tööline teeb 20 detaili ühe päeva jooksul. Siis õpilane teeb $0,8 \cdot 20 = 16$ detaili päevas.

Kolme päevaga teevad tööline ja õpilane koos $(20 + 16) \cdot 3 = 108$ detaili.

Hindamine:

Leitud, kuidas on seotud tööliste ja õpilase töökiirused	2p
Leitud, mitu detaili päevas teeb tööline	3p
Leitud, mitu detaili päevas teeb õpilane	1p
Leitud vastus	<u>1p</u>
	7p

Ainult õige vastuse eest anda 2 punkti.

Kui õpilane kasutab konkreetseid arvusid (detailide arv või tööaeg) ja ei põhjenda, miks niimoodi võib teha, siis anda kogu ülesande eest mitte rohkem kui 5p.

2. Vastus: $a = 2$

Lahendus:

$$x^2 + x(3 - a) - a - 4 = 0$$

Vastavalt Viète'i teoreemile: $x_1 \cdot x_2 = -a - 4$

$$x_1 + x_2 = a - 3$$

Lahendite ruutude summa:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a - 3)^2 - 2(-a - 4) = a^2 - 6a + 9 + 2a + 8 = \\ &= a^2 - 4a + 17 = (a - 2)^2 + 13\end{aligned}$$

Kuna esimene liidetav on alati mittenegatiivne, siis avaldise väikseim väärtus tuleb välja kui $a - 2 = 0$, kust $a = 2$

Hindamine:

Viète'i teoreemi kasutamine	2p
Ruutude summa avaldamine summa ja korrutise kaudu	2p
Lahendite ruutude summa avaldamine a kaudu	1p
Põhjendus, et väikseim väärtus tuleb välja kui $a = 2$	2p
	7p

Ainult õige vastuse eest anda 1p.

3. Vastus: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n - 1)$

Lahendus:

Lahendus 1:

Alustame alumisest reast (võib alustada ka ülemisest reast)

Selleks, et saada alumisele reale eelmiselt realt meil on $n - 1$ võimalust kuna n reas on täpselt $n - 1$ kolmnurka millel on ühine külg eelmise rea kolmnurgaga.

Samas märkame, et kui uss on juba alumises reas, siis sealt keskmisesse kolmnurka jõudmiseks on üks ainuke võimalus.

Selleks, et saada alt teisele reale on meil $n - 2$ võimalust ja rea sees ühest kolmnurgast teise jõudmiseks on olemas ainuke võimalus ...jne.

Selleks, et saada ülemisest kolmnurgast teisele reale on meil $2 - 1$ võimalust, ehk ainult 1 võimalus.

Kuna kolmnurgas on n rida, ja iga rea sees ühest kolmnurgast saab teise liikuda ainult ühel moel, siis kogu võimaluste arv on $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n - 1) = (n - 1)!$

Lahendus 2:

induktsiooni abil.

Induktsiooni baas $n = 2$. Kui kolmnurgas on 2 rida, siis alumisele reale jõudmiseks on 1 võimalus.

Induktsiooni hüpotees: kui $n = k$ siis on $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k - 1) = (k - 1)!$ võimalust

Kui $n = k + 1$, siis võimaluste arv on

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot (k + 1 - 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k = (k - 1)! \cdot k$$

Viimase sammuga lisandub uus rida kolmnurkasid.

k reast saab uss jõuda $k + 1$ ritta k moel, kuna k reas on täpselt k kolmnurka, millel on ühine külg $k + 1$ rea kolmnurkadega.

Kuna rea sees ühest kolmnurgast saab teise liikuda ainult ühel moel, siis võimaluste arv on

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k = k! \text{ mis tõestab vastuse õigsust.}$$

Hindamine:

Lahendus 1:

Näitamine, et k ritta jõudmiseks eelmisest reast on $k - 1$ võimalust 3p

Märkus, et rea sees on ainult 1 võimalus jõuda ühest kolmnurgast teise 1p

Õige vastus ja selgitus 3p

7p

Lahendus 2:

Idee, ei võimaluste arvu leidmiseks võib kasutada induktsiooni

1p

Õige hüpoteesi püstitamine

3p

Sammu tegemine ja tõestamine

3p

7p

Ainult õige vastuse eest anda 2p.

4. Vastus: 20cm^2

Lahendus:

Tõmbame punktist M sirglõigu MT nii, et $MT \parallel BK$ ning punkt T asuks lõigul AC .

Kuna CM on kolmnurga mediaan ja $MT \parallel BK$, siis MT on kolmnurga ABK kesklõik ja

$$MT = \frac{1}{2}BK = 3\text{cm}.$$

Et $MT \parallel BK$ ja BK on kolmnurga ABC kõrgus, siis kolmnurk MTC on täisnurkne. Pythagorase teoreemi kasutades saame:

$$TC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\text{ (cm)}$$

Et $MT \parallel OK$, siis kolmnurgad MTC ja

OKC on sarnased ja $\frac{OK}{MT} = \frac{KC}{TC}$.

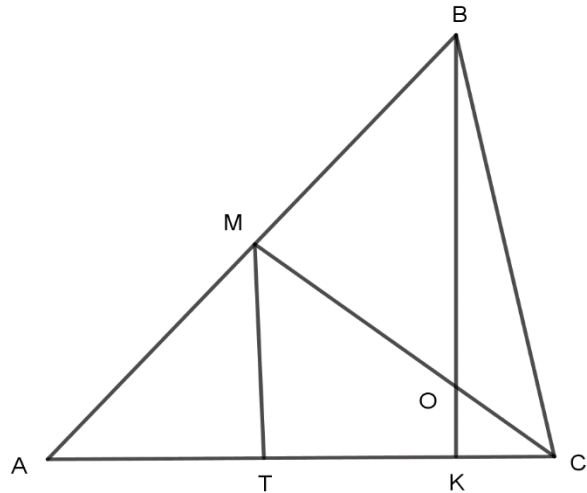
$$\frac{1}{3} = \frac{KC}{4}, \text{ kust } KC = \frac{4}{3}\text{cm}$$

$$\text{ja } TK = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\text{cm}.$$

Kuna MT on kolmnurga ABK kesklõik,

siis $AT = TK = \frac{8}{3}\text{cm}$.

$$\text{Ja } AC = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}\text{cm}.$$



$$\text{Kolmnurga pindala: } \frac{AC \cdot BK}{2} = \frac{\frac{20}{3} \cdot 6}{2} = 20\text{cm}^2$$

Hindamine:

Lõigu TC pikkuse leidmine 2p

Lõigu KC pikkuse leidmine 2p

Lõigu AC pikkuse leidmine 2p

Kolmnurga pindala arvutamine 1p

7p

Ainult õige vastuse eest anda 2p.

5. Vastus: a)10 numbrit; b) jah, on võimalik.

Lahendus:

a) Kõik järjestused pikkusega kolm: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Neid on 8 tk.

Kuna reas võib igat numbrit kasutada mitmes kolmekohalises järjestuses, v.a. esimene ja viimane number, mida me saame kasutada vaid ühes järjestuses, siis "ilus kuubis" numbrite rida ei või olla lühem, kui 10 numbrit.

Näitame, et saab koostada "ilus kuubis" numbrite rea, milles on 10 numbrit:

Näiteks, 0001011100 on "ilus kuubis", siin on olemas kõik järjestused pikkusega kolm selles järjekorras: 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100.

b) Jah, pärast 2019 käiku on võimalik saada "ilus kuubis"rida. Näitame, kuidas seda on võimalik saada:

Kuna "ilusas kuubis" numbrite reas on nii nulle, kui ka ühtesid, ja nullide arv on kas 4, 5 või 6, siis tehes 5 sammu on võimalik saada sama numbrite rida, mis oli alguses:

Näiteks, kaks korda muudame kolm nulli ühtedeks ja siis kolm korda muudame neid ühtesid nullideks (või teeme need 5 käiku teises järjekorras).

Ehk esimesed 2015 käiku võivad olla sellised, et iga viie sammu tagant saame esialgse rea.

Nüüd näitame, et viimase nelja sammuga on võimalik saada "ilusa kuubis" numbride rea: Olgu esialgne "ilus kuubis" lühim numbrite rida selline: 0001011100.

Viimased neli sammu on, näiteks, järgmised: 0001011100 -> 1111011100 -> 1111111111 -> 1110101111 -> 1110100011. Saadud numbrite järjestus on "ilus kuubis".

Hindamine:

a)

põhjendus, et "ilus kuubis" rida ei või olla lühem, kui 10 numbrit 1p

mõne "ilusa kuubis" rea leidmine, milles on 10 numbrit 2p

b)

näitamine, et 2015 käiguga on võimalik saada esialgne rida 2p

viimase nelja käigu näitamine 2p

7p

Ainult õige vastuse eest:

a) anda 1p

b) anda 0p